Д. Т. Хартвиг, Д. А. Вильямс II, Диагональная редукционная алгебра для супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$, *ТМФ*, 2022, том 210, номер 2, 179–198

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10138

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 210, № 2
февраль, 2022

Д. Т. Хартвиг*, **Д. А. Вильямс II**†

ДИАГОНАЛЬНАЯ РЕДУКЦИОННАЯ АЛГЕБРА ДЛЯ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{osp}(1|2)$

В работах Хорошкина и Огиевецкого ранее была рассмотрена задача детального описания редукционных алгебр, связанных с парой алгебр Ли $(\mathfrak{G}, \mathfrak{g})$, в случае диагональной редукционной алгебры для $\mathfrak{gl}(n)$. Диагональная редукционая алгебра для пары супералгебр Ли $(\mathfrak{osp}(1|2) \times \mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{osp}(1|2))$ рассматривается как пространство двойных смежных классов с ассоциативным $\diamond$-произведением. Дано ее полное представление в терминах образующих и отношений. Для этой редукционной алгебры также рассмотрен базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта, элементы типа элементов Казимира и подгруппа автоморфизмов.

Ключевые слова: редукционная алгебра, ортосимплектическая супералгебра Ли, алгебра Желобенко, экстремальный проектор, ассоциативная супералгбра.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10138

1. ВВЕДЕНИЕ

В монографии [1] Желобенко разработал локализованную версию алгебры Микельсона [2] и использовал ее в теории представлений редуктивных алгебр Ли. В работе [3] был представлен обзор применения алгебр Микельсона–Желобенко для задач ветвления для классических алгебр Ли и найден базис типа Гельфанда–Цейтлина. Важным обобщением, сделанным Желобенко, является не зависящее от представления определение повышающих и понижающих операторов, связанных с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (редуктивной алгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{G}$) и ассоциативной алгеброй U, содержащей универсальную обертывающую алгебру $U(\mathfrak{g})$, с операторами, удовлетворяющими определенным динамическим соотношениям. Эта алгебра повышающих и понижающих операторов, как отмечалось в [4], обеспечивает основу для описания динамических групп Вейля и дает альтернативный путь развития идей работы [5]. Последние направления приложений можно увидеть в гармоническом

Д. Т. Хартвиг был поддержан Simons Foundation Collaboration (грант № 637600). Д. А. Вильямс II был поддержан NSF ECR-EHR Core Research Grant № 1920753.

*Department of Mathematics, Iowa State University, Iowa, USA. E-mail: jth@iastate.edu
†MathDwight, The Bronx, New York, USA. E-mail: dwight@mathdwight.com

анализе, скажем, так, как это сделано в работе [6], где эта алгебра называется трансвекторной. Этот класс алгебр также известен как алгебры симметрии благодаря их важности для понимания симметрий экстремальных систем [7], ключевого аспекта математической физики, в том числе при решении уравнения с обычным оператором Лапласа, уравнения Дирака и уравнений Максвелла.

Кроме того, объектом изучения были эти алгебры как таковые; большой прогресс был достигнут в работах Хорошкина, Огиевецкого [8], [9] и др. Мы следуем терминологии Хорошкина и Огиевецкого и, выбирая из вышеупомянутых вариантов названия, используем термин *редукционная алгебра*. Общая конструкция редукционных алгебр распространяется на супералгебры, квантовые и аффинные алгебры [10]–[13], а вложение редуктивной алгебры $\mathfrak{g}$ в бóльшую ассоциативную алгебру U порождает различные типы редукционных алгебр. Основным результатом работы [14] является описание образующих и соотношений для диагональной редукционной алгебры, связанной с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(n)$. Описание образующих и соотношений диагональных редукционных супералгебр, связанных с супералгебрами Ли, является открытой проблемой в теории ассоциативных супералгебр и теории суперпредставлений. В настоящей работе мы рассматриваем диагональную редукционную алгебру, связанную с первой супералгеброй Ли в серии $B(m,n)$, т. е. с супералгеброй $\mathfrak{osp}(1|2)$ [15]. Наш главный результат – полное описание диагональной редукционной алгебры $Z(\mathfrak{osp}(1|2)\times\mathfrak{osp}(1|2),\mathfrak{osp}(1|2))$.

В разделе 2 для определения редукционной алгебры $Z(\mathfrak{G},\mathfrak{g})$ и экстремальных проекторов, ассоциированных с супералгеброй $\mathfrak{G}$ и редуктивно вложенной в $\mathfrak{G}$ супералгеброй $\mathfrak{g}$, мы применяем конструкцию из работ [13] и [16].

В разделе 3 мы напоминаем, как задается ортосимплектическая супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$, чтобы затем представить для нее диагональную редукционную алгебру, а также теорему о базисе Пуанкаре–Биркгофа–Витта (ПБВ) относительно $\diamond$-произведения из [8] и явную реализацию алгебры $Z(\mathfrak{osp}(1|2)\times\mathfrak{osp}(1|2),\mathfrak{osp}(1|2))$ в терминах генераторов и соотношений.

Раздел 4 завершается приложениями; в том числе мы определяем элементы типа элемента Казимира и бесконечную подгруппу в группе автоморфизмов алгебры $Z(\mathfrak{osp}(1|2)\times\mathfrak{osp}(1|2),\mathfrak{osp}(1|2))$.

2. РЕДУКЦИОННЫЕ АЛГЕБРЫ ДЛЯ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

Напомним хорошо известную конструкцию из работы [13] и представим категориальные перспективы понятия экстремальных проекторов из статьи [16] и связанных с ней работ.

2.1. Редукционная алгебра. Пусть $\mathfrak{G}$ – супералгебра Ли и $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{G}$ – ее редуктивная в $\mathfrak{G}$ подалгебра с треугольным разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}_+$. Введем мультипликативное подмножество D в $U(\mathfrak{h})\setminus\{0\}$ и положим, что

$$U=D^{-1}U(\mathfrak{G})=D^{-1}U(\mathfrak{h})\otimes_{U(\mathfrak{h})}U(\mathfrak{G})$$

есть локализация кольца $U(\mathfrak{G})$ по множеству D. Пусть $I = U\mathfrak{g}_+$ есть левый идеал в U, порожденный $\mathfrak{g}_+$. Пусть

$$N = N_U(I) = \{x \in U \mid Ix \subset I\} = \{x \in U \mid \mathfrak{g}_+ x \subset I\}$$

есть нормализатор левого идеала I в U. Заметим, что $D^{-1}U(\mathfrak{h}) \subset N$, поскольку $xh = hx - [h, x] \in I$ для всех $x \in \mathfrak{g}_+$ и $h \in \mathfrak{h}$. (*D-локализованная*) *редукционная алгебра* определяется как $Z = Z(\mathfrak{G}, \mathfrak{g}; D) = Z(U, \mathfrak{g}) = N/I$. Далее мы часто пишем $Z(\mathfrak{G}, \mathfrak{g})$ вместо $Z(\mathfrak{G}, \mathfrak{g}; D)$, когда известно мультипликативное множество D.

2.2. Категория $\mathcal{C}(U, \mathfrak{g}_+)$. Левый U-модуль V является *локально $\mathfrak{g}_+$-конечным*, если $\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}_+)v < \infty$ для всех $v \in V$. Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{C}(U, \mathfrak{g}_+)$ – категория, объекты которой представляют собой локально $\mathfrak{g}_+$-финитные U-модули, а морфизмы – гомоморфизмы U-модулей.

2.3. Инварианты и коинварианты. Существуют два ковариантных функтора из $\mathcal{C}$ в категорию супервекторных пространств:

$$\begin{aligned} &(-)^+ \colon \mathcal{C} \to \mathsf{SVect}_{\mathbb{C}}, \qquad V^+ = \{v \in V \mid \mathfrak{g}_+ v = 0\}, \\ &(-)_- \colon \mathcal{C} \to \mathsf{SVect}_{\mathbb{C}}, \qquad V_- = V/\mathfrak{g}_- V, \end{aligned} \tag{2.1}$$

при этом V^+ – пространство $\mathfrak{g}_+$-*инвариантов* модуля V и V_- – пространство $\mathfrak{g}_-$-*ковариантов* модуля V. Элементы пространства V^+ также называются *примитивными* (или *сингулярными*) *векторами.* С этими функторами ассоциированы естественные преобразования в забывающей функтор $\mathsf{F} \colon \mathcal{C} \to \mathrm{SVect}_{\mathbb{C}}$ и из него, заданные с помощью вложения, и канононические проекции

$$\begin{aligned} &\iota \colon (-)^+ \Rightarrow \mathsf{F}, \qquad \iota_V \colon V^+ \hookrightarrow V, \\ &\pi \colon \mathsf{F} \Rightarrow (-)_-, \qquad \pi_V \colon V \twoheadrightarrow V_- \end{aligned} \tag{2.2}$$

соответственно. Зададим их вертикальную композицию Q,

$$\mathsf{Q} \colon (-)^+ \Rightarrow (-)_-, \qquad \mathsf{Q}_V = \pi_V \circ \iota_V,$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left=50, "(-)^+"] \arrow[rr, "F" description] \arrow[rr, bend right=50, "(-)_-"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\Downarrow\iota"] \arrow[rr, phantom, shift right=4, "\Downarrow\pi"] & & \mathrm{SVect} \end{tikzcd} . \tag{2.3}$$

В явном виде: для каждого объекта V категории $\mathcal{C}$ мы имеем отображение супервекторных пространств $\mathsf{Q}_V \colon V^+ \to V_-$, заданное как $\mathsf{Q}_V(v) = v + \mathfrak{g}_- V$ для любого элемента $v \in V^+$.

2.4. Экстремальные проекторы.

Определение. Мы говорим, что категория $\mathcal{C}$ обладает *экстремальным проектором*, если естественное отображение Q обратимо. В этом случае мы обозначаем обратное отображение как $\mathsf{P} \colon (-)_- \Rightarrow (-)^+$.

Предложение 2.1. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Категория $\mathcal{C}$ имеет экстремальный проектор.*
2. *Существует такой естественный эндоморфизм P забывающего функтора $\mathsf{F}\colon \mathcal{C} \to \mathsf{SVect}_{\mathbb{C}}$, что для всех объектов V категории $\mathcal{C}$*
   (i) $P_V \circ \iota_V = \iota_V$,
   (ii) $\pi_V \circ P_V = \pi_V$,
   (iii) $\operatorname{im} P_V \subset \operatorname{im} \iota_V$,
   (iv) $\ker \pi_V \subset \ker P_V$.

3. *Для любого U-модуля V в $\mathcal{C}$ существует отображение $P_V\colon V \to V$ супервекторных пространств, такое что для каждого морфизма $f\colon V \to W$ в $\mathcal{C}$ мы имеем $f \circ P_V = P_W \circ f$, при этом для любого V в $\mathcal{C}$ и любого $v \in V$*
   (i′) *если* $\mathfrak{g}_+ v = 0$, *то* $P_V(v) = v$,
   (ii′) $P_V(v) \in v + \mathfrak{g}_- V$,
   (iii′) $\mathfrak{g}_+ P_V(v) = 0$,
   (iv′) $P_V(\mathfrak{g}_- v) = 0$.

Кроме того, если эти утверждения выполнены, то $P_V^2 = P_V$ для всех объектов V категории $\mathcal{C}$.

Доказательство. Утверждения 2 и 3 эквивалентны по определению тех понятий, которые в них участвуют.

$1 \Longrightarrow 2$. Предположим, что категория $\mathcal{C}$ имеет экстремальный проектор; пусть $\mathsf{P}\colon (-)_- \Rightarrow (-)^+$ есть отображение, обратное к Q. Для любого объекта V из $\mathcal{C}$ зададим $P_V = \iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V$. Тогда P – вертикальная композиция естественных преобразований ι, P и π и, следовательно, естественный эндоморфизм функтора F. Проверим свойства (i)–(iv):

(i): $P_V \circ \iota_V = \iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V \circ \iota_V = \iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \mathsf{Q}_V = \iota_V$;

(ii): $\pi_V \circ P_V = \pi_V \circ \iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V = \mathsf{Q}_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V = \pi_V$;

свойства (iii) и (iv) немедленно получаются из определения отображения P_V.

$2 \Longrightarrow 1$. Предположим, что P – естественный эндоморфизм функтора F, удовлетворяющий соотношениям (i′)–(iv′). Пусть V – объект из $\mathcal{C}$. В силу (iii′) и (iv′) эндоморфизм P_V индуцирует единственное отображение $\mathsf{P}_V\colon V_- \to V^+$, такое что $\iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V = P_V$. С учетом единственности P_V и естественности отображений P_V, ι_V и π_V отображение P_V определяет естественное преобразование $\mathsf{P}\colon (-)_- \Rightarrow (-)^+$. Остается показать, что P является обратным к Q.

В силу условия (i) имеем $\iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \mathsf{Q}_V = \iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V \circ \iota_V = P_V \circ \iota_V = \iota_V$. Поскольку отображение ι_V является мономорфизмом, это влечет $\mathsf{P}_V \circ \mathsf{Q}_V = \mathrm{Id}_{V^+}$. Аналогично в силу условия (ii) имеем $\mathsf{Q}_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V = \pi_V \circ \iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V = \pi_V \circ P_V = \pi_V$. Поскольку отображение π_V является эпиморфизмом, это влечет $\mathsf{Q}_V \circ \mathsf{P}_V = \mathrm{Id}_{V_-}$.

Наконец, $P_V^2 = (\iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V)^2 = \iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \mathsf{Q}_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V = \iota_V \circ \mathsf{P}_V \circ \pi_V = P_V$.

Определение. Если V – объект категории $\mathcal{C}$, мы называем P_V *экстремальным проектором* в точке V.

2.5. Универсальный модуль старшего веса. *Универсальный U-модуль $\mathfrak{g}_+$-старшего веса* – это $M = U/I$. Он является левым U-модулем, порожденным вектором $\mathbf{1} = 1_U + I \in M$, который удовлетворяет условию $\mathfrak{g}_+\mathbf{1} = 0$. В силу того, что $IN \subset I$, пространство M является правым N-модулем. Кроме того, $MI = 0$. Таким образом, M – это правый Z-модуль. Всё это делает пространство M (U, Z)-бимодулем.

Пусть V – произвольный левый U-модуль. Сужая его действие на N и используя $IV^+ = 0$, мы можем рассматривать V^+ как Z-модуль. С другой стороны, $\mathrm{Hom}_U(M, V)$ – левый Z-модуль, поскольку M является (U, Z)-бимодулем.

Лемма 2.1. *Для любого левого U-модуля V существует естественный изоморфизм левых Z-модулей*

$$\psi\colon V^+ \cong \mathrm{Hom}_U(M, V). \tag{2.4}$$

Доказательство. Отправим $v \in V^+$ в единственное отображение левого U-модуля $\psi_v\colon M \to V$, заданное формулой $\psi_v(\mathbf{1}) = v$. Обратное отображение переводит $\psi\colon M \to V$ в $\psi(\mathbf{1})$.

Особенно важен случай $V = M$, который дает еще одну реализацию редукционной алгебры Z.

Лемма 2.2. *Имеются два описания алгебры Z:* 1) $Z = M^+$ *и* 2) *для некоторого естественного изоморфизма левых Z-модулей*

$$Z \cong \mathrm{End}_U(M)^{\mathrm{op}}. \tag{2.5}$$

Доказательство. 1. Смежный класс $u + I \in M$ лежит в M^+, если и только если $Iu \subset I$, а это по определению означает, что $u \in N$.

2. Пусть $\psi\colon M^+ \to \mathrm{End}_U(V)$ есть изоморфизм (2.4) супервекторных пространств в специальном случае $V = M$. Пусть $X, Y \in Z$, положим $X = x + I$, $Y = y + I$. Тогда $\psi_{XY}(\mathbf{1}) = XY$ и при этом $(\psi_Y \circ \psi_X)(\mathbf{1}) = \psi_Y(X) = \psi_Y(x+I)$. Поскольку ψ_Y – изоморфизм левого U-модуля, имеем $\psi_Y(x+I) = x\psi_Y(1_U + I) = xY = xy + I = XY$.

Замечание. С помощью соответствия между тензорами и hom-функторами получаем $(M \otimes_Z -) \dashv \mathrm{Hom}_U(M, -)$. Более точно,

$$\mathrm{Hom}_U(M \otimes_Z X, V) \cong \mathrm{Hom}_Z(X, \mathrm{Hom}_U(M, V)) \cong \mathrm{Hom}_Z(X, V^+) \tag{2.6}$$

для каждого левого U-модуля V и левого Z-модуля X.

Лемма 2.3. *Если категория $\mathcal{C}$ обладает экстремальным проектором, то M – проективный объект $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму в $\mathcal{C}$ с точной последовательностью в строке:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[r, "\phi"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Покажем, что f можно поднять до отображения $g\colon M \to X$, такого что диаграмма коммутативная.

Пусть y_0 – образ вектора $\mathbf{1}$. Поскольку ϕ – сюръективное отображение, существует $x \in X$, такой что $\phi(x) = y_0$. Положим $x_0 = P_X(x)$, где P_X – экстремальный проектор в точке X. Тогда

$$\phi(x_0) = \phi \circ P_X(x) = P_Y \circ \phi(x) = P_Y(y_0) = P_Y(f(\mathbf{1})) = f(P_M(\mathbf{1})) = f(\mathbf{1}) = y_0$$

(здесь мы использовали равенство $P_M(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, которое следует из условия (i′) предложения 2.1.) Кроме того, $\mathfrak{g}_+ x_0 = \mathfrak{g}_+ P_X x = 0$. В результате существует единственное отображение U-модуля $g\colon M \to X$, удовлетворяющее условию $g(\mathbf{1}) = x_0$. Понятно, что $\psi \circ g = f$ в силу того, что оба отображения действуют одинаково на генератор $\mathbf{1}$ U-модуля M.

2.6. $\diamond$-Произведение на двойном смежном классе. Пространство ковариантов $M_- = M/\mathfrak{g}_- M$ естественным образом отождествляется с пространством двойных смежных классов $\mathfrak{g}_- U \backslash U / U\mathfrak{g}_+ = U/\mathrm{I\!I}$, где $\mathrm{I\!I} = U\mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_- U$. В явном виде $(u + I) + \mathfrak{g}_- M \mapsto u + \mathrm{I\!I}$ для $u \in U$.

Предположим, что $\mathcal{C}$ имеет экстремальный проектор. Тогда мы можем определить $\diamond$-произведение на M_- требованием, что изоморфизм $\mathsf{P}_M\colon M_- \to M^+ = Z$ супервекторных пространств является изоморфизмом алгебр. То есть для любых $x, y \in M_-$ зададим

$$x \diamond y = \mathsf{Q}_M\big(\mathsf{P}_M(x)\mathsf{P}_M(y)\big).$$

Поскольку M – правый Z-модуль и $\mathfrak{g}_- M$ – правый Z-подмодуль, факторпространство M_- есть правый Z-модуль. В следующей лемме $\diamond$-произведение определяется в терминах экстремального проектора и правого действия алгебры Z на M_- (напомним, что $M^+ = Z$).

Лемма 2.4 [8]. *Для $x, y \in M_-$ имеем*

$$x \diamond y = x\mathsf{P}_M(y). \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть $z \in Z$. Поскольку M является (U, Z)-бимодулем, правое действие элемента z на M есть эндоморфизм U-модуля. В силу функториальности отображений $(-)^+$ и $(-)_-$ это индуцирует эндоморфизмы супервекторных пространств $z^+\colon M^+ \to M^+$ и $z_-\colon M_- \to M_-$. В явном виде $z^+(x + I) = xz + I$ для $x + I \in M^+$ и $z_-(x + \mathrm{I\!I}) = xz' + \mathrm{I\!I}$ для $x + \mathrm{I\!I} \in M_-$, где $z' \in N$ выбран произвольно в соответствии с представлением $z = z' + I \in Z$. С помощью естественности отображения Q получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} M^+ \arrow[r, "\mathsf{Q}_M"] \arrow[d, "z^+"] & M_- \arrow[d, "z_-"] \\ M^+ \arrow[r, "\mathsf{Q}_M"] & M_- \end{tikzcd} .$$

Другими словами, $\mathsf{Q}_M\colon M^+ \to M_-$ есть отображение правых Z-модулей. С учетом этого факта и того, что $Z = M^+$, для всех $x, y \in M_-$ имеем

$$x \diamond y = \mathsf{Q}_M\big(\mathsf{P}_M(x)\mathsf{P}_M(y)\big) = \mathsf{Q}_M\big(\mathsf{P}_M(x)\big)\mathsf{P}_M(y) = x\mathsf{P}_M(y).$$

2.7. Генераторы алгебры Z. Поскольку $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра в $\mathfrak{G}$, существует $\mathfrak{g}$-модульное дополнение $\mathfrak{p}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{G}$, т. е. $\mathfrak{G} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{p}$ как сумма $\mathfrak{g}$-модулей. Рассмотрим композицию отображений

$$\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathfrak{G} \hookrightarrow U \twoheadrightarrow U/\mathrm{II} = M_- \xrightarrow{\mathsf{P}_M} M^+ \cong Z. \tag{2.8}$$

Напомним, что $D^{-1}U(\mathfrak{h}) \subset N$, следовательно, Z является $D^{-1}U(\mathfrak{h})$-кольцом (это означает, что существует отображение алгебр $D^{-1}U(\mathfrak{h}) \to Z$, образ которого не обязательно содержится в центре алгебры Z).

Лемма 2.5. *Образ алгебры $\mathfrak{p}$ при отображении (2.8) порождает Z как $D^{-1}U(\mathfrak{h})$-кольцо. Поэтому образ алгебры $\mathfrak{p}$ в U/II порождает U/II как $D^{-1}U(\mathfrak{h})$-кольцо относительно $\diamond$-произведения.*

Доказательство. По теореме ПБВ, примененной к $\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{g}_+$, имеем

$$U \cong U(\mathfrak{g}_-) \otimes D^{-1}U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{p}) \otimes U(\mathfrak{g}_+).$$

Запишем разложение $U(\mathfrak{g}_+) = \mathbb{C} \oplus U(\mathfrak{g}_+)\mathfrak{g}_+$ и, использовав $U(\mathfrak{g}_+)\mathfrak{g}_+ \subset I$, видим, что $U(\mathfrak{g}_-) \otimes D^{-1}U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{p})$ по-прежнему отображает на U/I. С другой стороны, поскольку $P_M\mathfrak{g}_- = 0$, подпространство $D^{-1}U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{p})$ в U отображает на M^+. Это доказывает утверждение.

2.8. Неприводимость Z-модулей V^+.

Предложение 2.2. *Пусть V – объект категории $\mathcal{C}$. Если $v \in V^+$ порождает V как U-модуль, то v порождает V^+ как Z-модуль. В частности, если V – простой U-модуль, то V^+ – простой U-модуль.*

Доказательство. Объект V порожден элементом v, поэтому отображение ψ_v сюръективно. Пусть K – ядро отображения ψ_v. Короткая точная последовательность U-модулей

$$0 \to K \to M \to V \to 0$$

приводит к длинной точной последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}_U(M, K) \to \mathrm{Hom}_U(M, M) \to \mathrm{Hom}_U(M, V) \to \mathrm{Ext}^1_U(M, K) \to \cdots .$$

Пространство M проективное по лемме 2.3, отсюда $\mathrm{Ext}^1_U(M, K) = 0$. Следовательно, отображение $\mathrm{Hom}_U(M, M) \to \mathrm{Hom}_U(M, V)$, заданное как $z \mapsto \psi_v \circ z$, сюръективно. Заметим, что $\mathrm{Hom}_U(M, M) = \mathrm{End}_U(M) \cong Z^{\mathrm{op}}$ по лемме 2.2 и $\mathrm{Hom}_U(M, V) \cong V^+$ по лемме 2.1. В соответствии с этими отождествлениями отображение, о котором идет речь, – это просто $Z \to V^+$, заданное как $z \mapsto zv$. Утверждение, что оно сюръективно, равносильно тому, что v порождает V^+ как Z-модуль.

3. ДИАГОНАЛЬНАЯ РЕДУКЦИОННАЯ АЛГЕБРА ДЛЯ $\mathfrak{osp}(1|2)$

Здесь мы начинаем практическое исследование алгебры $Z = Z(\mathfrak{G}, \mathfrak{g}, D)$, где $\mathfrak{G}$ – супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(1|2) \times \mathfrak{osp}(1|2)$ и $\mathfrak{g}$ – образ супералгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$ при диагональном вложении. Подмножество D из раздела 2 представляет собой мультипликативное множество, порожденное $\{H - n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, где $H = (h, h)$ в $\mathfrak{osp}(1|2) \times \mathfrak{osp}(1|2)$

выбирается так, чтобы было возможным существование экстремального проектора для $\mathfrak{g}$ (см. работы [17], [18]); его описание приведено в п. 3.2. Мы исследуем структуру супералгебры Z, задав в ней генераторы и соотношения и определив базис ПБВ относительно $\diamond$-произведения, чтобы обосновать полное представление для Z. Далее все (супер)векторные пространства и (супер)алгебры рассматриваются как объекты над полем комплексных чисел, если иное не оговорено особо. Основные положения теории супералгебр Ли можно найти в монографиях [19]–[21].

3.1. Супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$.

3.1.1. *Определение.* Классическая супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$ типа II – это супервекторное пространство размерности $(3|2)$ (суперразмерности 1), натянутое на элементы $\{x_{-2\alpha}, h, x_{2\alpha}; x_{-\alpha}, x_\alpha\}$, которое сохраняет четную невырожденную суперсимметричную билинейную форму в супервекторном пространстве размерности $(1|2)$ (суперразмерности -1).

Эквивалентно, пусть $\mathfrak{gl}(1|2)$ – множество всех линейных преобразований, заданных на $\mathbb{C}^{1|2}$, записанных как матрицы в стандартном базисе $\{v_0; v_1, v_2\}$ пространства $\mathbb{C}^{1|2}$ с четным вектором v_0 и нечетными векторами v_1, v_2,

$$v_0 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Элементами в $\mathfrak{gl}(1|2)$ являются блочные матрицы вида $\left[\begin{smallmatrix} a & r\\ c & A\end{smallmatrix}\right]$; здесь a – скаляр, r – вектор-строка, c – вектор-столбец и A – матрица размера 2×2. Ортосимплектическая супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$ – это супералгебра Ли для $\mathfrak{gl}(1|2)$, в которой $a=0$, $r=(r_1, r_2)$, $c = \left(\begin{smallmatrix} r_2\\ -r_1\end{smallmatrix}\right)$ и A – элемент алгебры $\mathfrak{sl}(2)$.

Для полноты картины приведем суперкоммутационные соотношения для

$$\mathfrak{osp}(1|2) = \mathfrak{osp}(1|2)_{\bar 0} \oplus \mathfrak{osp}(1|2)_{\bar 1} = (\mathbb{C}x_{-2\alpha} \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}x_{2\alpha}) \oplus (\mathbb{C}x_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}x_\alpha), \tag{3.1}$$

где

$$x_{-2\alpha} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}, \qquad x_{-\alpha} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

$$x_{2\alpha} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, \qquad x_\alpha = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

Они имеют вид

$$[h, x_{k\alpha}] = -kx_{k\alpha}, \qquad k \in \{\pm1, \pm2\},$$

$$\begin{aligned} &[x_\alpha, x_\alpha] = -2x_{2\alpha}, && [x_{-\alpha}, x_{-\alpha}] = 2x_{-2\alpha}, && [x_\alpha, x_{-2\alpha}] = x_{-\alpha}, && [x_{-\alpha}, x_{2\alpha}] = x_\alpha,\\ &[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h, && [x_{-2\alpha}, x_{2\alpha}] = h, && [x_\alpha, x_{2\alpha}] = 0, && [x_{-\alpha}, x_{-2\alpha}] = 0. \end{aligned}$$

Четная часть $\mathfrak{osp}(1|2)_{\bar 0}$ алгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$ является алгеброй Ли, изоморфной $\mathfrak{sl}(2)$, а нечетная часть $\mathfrak{osp}(1|2)_{\bar 1}$ изоморфна естественному $\mathfrak{sl}(2)$-модулю $\mathbb{C}^2$. Картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{osp}(1|2)$ совпадает с картановской подалгеброй в $\mathfrak{osp}(1|2)_{\bar 0}$, которой является $\mathbb{C}h$. В табл. 1 мы перечисляем некоторые полезные скобки в $\mathfrak{osp}(1|2)$, которые будем использовать в связи с экстремальными проекторами.

Таблица 1. Таблица полезных правых и левых присоединенных действий алгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$ саму на себя.

	$[\cdot, x_{-\alpha}]^5$	$[\cdot, x_{-\alpha}]^4$	$[\cdot, x_{-\alpha}]^3$	$[\cdot, x_{-\alpha}]^2$	$[\cdot, x_{-\alpha}]$
$x_{-2\alpha}$					0
$x_{-\alpha}$				0	$2x_{-2\alpha}$
h			0	$2x_{-2\alpha}$	$x_{-\alpha}$
x_{α}		0	$2x_{-2\alpha}$	$x_{-\alpha}$	h
$x_{2\alpha}$	0	$-2x_{-2\alpha}$	$-x_{-\alpha}$	$-h$	$-x_{\alpha}$
	$[x_{\alpha}, \cdot]$	$[x_{\alpha}, \cdot]^2$	$[x_{\alpha}, \cdot]^3$	$[x_{\alpha}, \cdot]^4$	$[x_{\alpha}, \cdot]^5$
$x_{-2\alpha}$	$x_{-\alpha}$	h	x_{α}	$-2x_{2\alpha}$	0
$x_{-\alpha}$	h	x_{α}	$-2x_{2\alpha}$	0	
h	x_{α}	$-2x_{2\alpha}$	0		
x_{α}	$-2x_{2\alpha}$	0			
$x_{2\alpha}$	0				

3.1.2. *Нечетные корни супералгебры* $\mathfrak{osp}(1|2)$. Для супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$ система корней Φ типа BC_1 задается как объединение четных (бозонных) корней $\Phi_0 = \{\pm 2\delta_1\}$ и нечетных (фермионных) корней $\Phi_1 = \{\pm\delta_1\}$. Кроме того, мы выбираем нестандартное множество положительных корней $\Phi^+ = \{-\delta_1, -2\delta_1\}$, ассоциированное с базой $\Pi = \{-\delta_1\}$ системы Φ. Положительные четные (нечетные) корни, а также их отрицательные аналоги определяются соответствующими пересечениями с Φ_0 (соответственно с Φ_1). В частности, $\mathfrak{osp}(1|2)$ имеет единственный положительный нечетный корневой вектор x_α, отождествляющийся с -1 при $\alpha = -\delta_1$.

Отсюда следует, что супералгебра $\mathfrak{osp}(1|2)$ имеет треугольное разложение

$$\mathfrak{osp}(1|2) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \quad \text{где} \quad \mathfrak{n}_\pm = \mathbb{C}x_{\pm 2\alpha} \oplus \mathbb{C}x_{\pm\alpha}.$$

Форма Киллинга супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$ невырождена, и она индуцирует билинейную форму на $\mathfrak{h}^*$, такую что $(\alpha, \alpha) = 1$.

3.1.3. *Диагональное вложение.* Всюду далее в этом разделе $\mathfrak{g}$ – редуктивное вложение супералгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$ в $\mathfrak{G} = \mathfrak{osp}(1|2) \times \mathfrak{osp}(1|2)$, получающееся как образ при отображении $\delta\colon \mathfrak{osp}(1|2) \to \mathfrak{G}$, $x \mapsto (x, x)$ для всех x из $\mathfrak{osp}(1|2)$.

Чтобы учесть замечания предыдущего раздела, введем линейное дополнение к $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{p} = \{(x, -x) \mid x \in \mathfrak{osp}(1|2n)\}.$$

Оно является образом при отображении $\delta_-\colon \mathfrak{osp}(1|2) \to \mathfrak{G}$, $x \mapsto (x, -x)$ для всех x из $\mathfrak{osp}(1|2)$. Тогда $\mathfrak{G} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{p}$ как сумма $\mathfrak{g}$-модулей. Более того, отображение $\mathfrak{g} \to \mathfrak{p}$, переводящее (x, x) в $(x, -x)$ для любого x из $\mathfrak{osp}(1|2)$, есть изоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей.

Образ в $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{G}$ корневого вектора x_β супералгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$ мы обозначаем как X_β, аналогично $\tilde{x}_\beta$ – образ в $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{G}$. Другими словами, $X_\beta = (x_\beta, x_\beta)$ и $\tilde{x}_\beta = (x_\beta, -x_\beta)$. Также введем обозначения $H = (h, h)$ и $\tilde{h} = (h, -h)$. Эти же обозначения сохраняются и в $\mathfrak{G} \hookrightarrow U$, после того как мы фиксируем мультипликативное множество D, порожденное произведением факторов $(H - m)^n$, где m – целое число, n – натуральное число.

Опять же поясним: левый идеал I в U есть $U(\mathbb{C}X_\alpha + \mathbb{C}X_{2\alpha})$, и мы пишем символ $\amalg$ для суммы подпространств $(\mathbb{C}X_{-\alpha} + \mathbb{C}X_{-2\alpha})U + U(\mathbb{C}X_\alpha + \mathbb{C}X_{2\alpha})$.

Алгебра $N_U(U(\mathbb{C}X_\alpha + \mathbb{C}X_{2\alpha}))/U(\mathbb{C}X_\alpha + \mathbb{C}X_{2\alpha})$, здесь обозначаемая как $Z(\mathfrak{G}, \mathfrak{g})$, является диагональной редукционной алгеброй для $\mathfrak{osp}(1|2)$, соответствующей вложению $\delta\colon \mathfrak{osp}(1|2) \subset \mathfrak{osp}(1|2) \times \mathfrak{osp}(1|2)$.

3.1.4. *Универсальная обертывающая алгебра и базис ПБВ.* Упорядоченный базис в $\mathfrak{G}$ – это множество

$$\{X_{-2\alpha}, X_{-\alpha}, H, \tilde{x}_{-2\alpha}, \tilde{x}_{-\alpha}, \tilde{h}, \tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_{2\alpha}, X_\alpha, X_{2\alpha}\}. \tag{3.2}$$

Этот выбор упорядоченного базиса в $\mathfrak{G}$ является совместным с $\mathrm{I\!I}$.

Непосредственные вычисления показывают, что если $[x, y] = z$, то для всех корневых векторов x и y в $\mathfrak{osp}(1|2)$

$$[X, \tilde{y}\,] = \tilde{z}, \qquad [\tilde{x}, \tilde{y}\,] = Z, \qquad [X, Y] = Z. \tag{3.3}$$

Применение теоремы о базисе ПБВ для супералгебр Ли в отношении базиса (3.2) дает базис универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{G})$. То есть $U(\mathfrak{G})$ натянута на линейно независимые мономы вида

$$X_{-2\alpha}^a X_{-\alpha}^b H^c \tilde{x}_{-2\alpha}^p \tilde{x}_{-\alpha}^q \tilde{h}^r \tilde{x}_\alpha^s \tilde{x}_{2\alpha}^t X_\alpha^d X_{2\alpha}^e,$$

в которых показатели b, d, q, s не превосходят 1 и a, c, e, r, p, t – произвольные натуральные числа. Таким образом, U – свободное левое (правое) $D^{-1}U(\mathfrak{h})$-кольцо.

3.1.5. *Антиавтоморфизм.* Для наших вычислений нам потребуется антиавтоморфизм супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$, заданный как

$$\theta(x_{\pm\alpha}) = \sqrt{-1}x_{\mp\alpha}, \qquad \theta(x_{\pm 2\alpha}) = -x_{\mp 2\alpha}, \qquad \theta(h) = h. \tag{3.4}$$

Имеем $\theta([x, y]) = (-1)^{|x|\,|y|}[\theta(y), \theta(x)]$, при этом θ – отображение супервекторных пространств. Следовательно, можно расширить это отображение до антиавтоморфизма супералгебры

$$\Theta\colon U \to U, \qquad \Theta(xy) = (-1)^{|x|\,|y|}\Theta(y)\Theta(x).$$

Помимо этого, $\Theta(\mathrm{I\!I}) \subseteq \mathrm{I\!I}$, следовательно, Θ индуцирует линейный эндоморфизм на $U/\mathrm{I\!I}$. Фактически Θ – антиавтоморфизм на $U/\mathrm{I\!I}$ относительно $\diamond$-произведения.

3.2. Экстермальные проекторы для супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$. Для общего ознакомления с экстремальными проекторами, связанными с различными алгебраическими объектами, мы отсылаем к работе [22].

Для удобства читателя выведем формулы для экстремального проектора супералгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$, используя обозначения текущего раздела. Разложение Тейлора TU для U можно определить как проективный предел

$$TU = \lim_{\longleftarrow} \frac{U}{\mathfrak{g}_-^n U + U\mathfrak{g}_+^n}. \tag{3.5}$$

Определим $P \in TU$ формулой

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(h) x_{-\alpha}^n x_\alpha^n, \tag{3.6}$$

где $\varphi_0(h) = 1$ и $\varphi_n(h) \in \mathbb{C}(h)$ для $n > 0$ суть рациональные функции, подлежащие определению. Введем $\kappa_n(h) \in \mathbb{C}[h]$, потребовав, чтобы в $U(\mathfrak{osp}(1|2))$ было выполнено следующее соотношение:

$$x_\alpha x_{-\alpha}^n - (-1)^n x_{-\alpha}^n x_\alpha = [x_\alpha, x_{-\alpha}^n] = \kappa_n(h) x_{-\alpha}^{n-1}, \quad n \geqslant 1; \qquad \kappa_0(h) = 0. \tag{3.7}$$

С помощью индукции и суперправила Лейбница получаем явный вид этого множителя:

$$\kappa_n(h) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (h-k) = \begin{cases} n/2, & n \text{ четное}, \\ h - (n-1)/2, & n \text{ нечетное}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Имеем

$$\begin{aligned} x_\alpha P &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(h+1) x_\alpha x_{-\alpha}^n x_\alpha^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \bigl(\varphi_n(h+1)(-1)^n x_{-\alpha}^n x_\alpha^{n+1} + \varphi_n(h+1)\kappa_n(h) x_{-\alpha}^{n-1} x_\alpha^n\bigr) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \bigl((-1)^n \varphi_n(h+1) + \varphi_{n+1}(h+1)\kappa_{n+1}(h)\bigr) x_{-\alpha}^n x_\alpha^{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что $x_\alpha P = 0$, если и только если

$$\varphi_n(h) = \frac{(-1)^n}{\kappa_n(h-1)} \varphi_{n-1}(h), \qquad n \geqslant 1, \tag{3.9}$$

или, эквивалентно,

$$\varphi_{2n-1}(h) = -\frac{1}{h-n} \varphi_{2n-2}(h), \quad \varphi_{2n}(h) = \frac{1}{n} \varphi_{2n-1}(h), \qquad n \geqslant 1. \tag{3.10}$$

Вместе с начальным условием $\varphi_0(h) = 1$ это единственным образом определяет рациональные функции $\varphi_n(h)$. Несколько первых функций $\varphi_n(h)$ таковы:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(h) = 1, && \varphi_1(h) = \varphi_2(h) = -\frac{1}{h-1}, \\ &\varphi_3(h) = \frac{1}{(h-2)(h-1)}, && \varphi_4(h) = \frac{1}{2}\varphi_3(h). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Мы видим, что минимальным мультипликативным множеством D, удовлетворяющим условию Оре и таким, что $\varphi_n(h) \in D^{-1}U(\mathfrak{h})$, является мультипликативный моноид в $U(\mathfrak{h}) \setminus \{0\}$, порожденный $\{h - n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

3.3. Генераторы. $\diamond$-Произведение на $U/\mathrm{I\!I}$ задается следующим образом. Для $u \in U$ положим $\bar{u} = u + \mathrm{I\!I} \in U/\mathrm{I\!I}$. Для любых $u, v \in U$ зададим

$$\bar{u} \diamond \bar{v} = uPv + \mathrm{I\!I}. \tag{3.12}$$

Определение корректно, поскольку $\mathrm{I\!I}P = 0 = P\mathrm{I\!I}$. Его можно также записать как

$$\begin{aligned}\bar{u} \diamond \bar{v} = uv + [u, X_{-\alpha}] \cdot \varphi_1(H+1) \cdot [X_\alpha, v] + \\ + [[u, X_{-\alpha}], X_{-\alpha}] \cdot \varphi_2(H+2) \cdot [X_\alpha, [X_\alpha, v]] + \cdots + \mathrm{I\!I}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Предложение 3.1. *Алгебра $Z(\mathfrak{osp}(1|2) \times \mathfrak{osp}(1|2), \mathfrak{osp}(1|2))$ порождается следующими элементами как $D^{-1}U(\mathfrak{h})$-кольцо*:

$$\begin{aligned}
P\tilde{x}_{2\alpha} + I &= \tilde{x}_{2\alpha} + I,\\
P\tilde{x}_{\alpha} + I &= \tilde{x}_{\alpha} - 2\varphi_1(H)X_{-\alpha}\tilde{x}_{2\alpha} + I,\\
P\tilde{h} + I &= \tilde{h} + \varphi_1(H)X_{-\alpha}\tilde{x}_{\alpha} - 2\varphi_2(H)X_{-\alpha}^2\tilde{x}_{2\alpha} + I,\\
P\tilde{x}_{-\alpha} + I &= \tilde{x}_{-\alpha} + \varphi_1(H)X_{-\alpha}\tilde{h} + \varphi_2(H)X_{-\alpha}^2\tilde{x}_{\alpha} - 2\varphi_3(H)X_{-\alpha}^3\tilde{x}_{2\alpha} + I,\\
P\tilde{x}_{-2\alpha} + I &= \tilde{x}_{-2\alpha} + \varphi_1(H)X_{-\alpha}\tilde{x}_{-\alpha} + \varphi_2(H)X_{-\alpha}^2\tilde{h} + \\
&\qquad + \varphi_3(H)X_{-\alpha}^3\tilde{x}_{\alpha} - 2\varphi_4(H)X_{-\alpha}^4\tilde{x}_{2\alpha} + I.
\end{aligned}$$

Доказательство. Применим лемму 2.5, тогда множество

$$\bigl\{P(\tilde{u} + I) \mid \tilde{u} \in \{\tilde{x}_{-2\alpha}, \tilde{x}_{-\alpha}, \tilde{h}, \tilde{x}_{\alpha}, \tilde{x}_{2\alpha}\}\bigr\}$$

дает набор генераторов алгебры Z. Далее имеем

$$P(\tilde{u} + I) = \tilde{u} + \varphi_1(H)X_{-\alpha}[X_\alpha, \tilde{u}] + \varphi_2(H)X_{-\alpha}^2[X_\alpha, [X_\alpha, \tilde{u}]] + \cdots + I.$$

Теперь можно использовать скобку (3.3) вместе с нижней частью табл. 1.

Возвратимся к рассуждениям из п. 2.8 на примере неприводимого Z-модуля, связанного с осцилляторными представлениями. Для каждого неотрицательного целого числа λ существует конечномерное неприводимое представление $V(\lambda)$ супералгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$. Размерность этого представления равна $2\lambda+1$, и набор таких представлений исчерпывает все конечномерные неприводимые представления с точностью до эквивалентности. Спектр элемента h на $V(\lambda)$ равен $\{\lambda, \lambda-1, \ldots, -\lambda\}$. Ассоциативная супералгебра $\mathbb{C}[x]$, где x полагается нечетным, несет действие супералгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$, определяемое формулами $x_\alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}$ и $x_{-\alpha} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x$. Спектр элемента h в $\mathbb{C}[x]$ равен $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Поэтому спектр элемента h в $\widetilde{V}(\lambda) = \mathbb{C}[x] \otimes V(\lambda)$ является подмножеством в $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ и, следовательно, действие алгебры $U(\mathfrak{osp}(1|2) \times \mathfrak{osp}(1|2))$ на $\widetilde{V}(\lambda)$ продолжается на локализацию U (во всех точках $h - n$ с $n \in \mathbb{Z}$). Кроме того, $\widetilde{V}(\lambda)$ локально конечно относительно действия x_α, следовательно, оно является объектом категории $\mathcal{C}$. Это означает, что пространство примитивных векторов ($\mathfrak{g}_+$-инвариантов) $\widetilde{V}(\lambda)^+$ – неприводимое представление диагональной редукционной алгебры Z.

Пример 3.1. Суперпространство $V = \mathbb{C}[x]\otimes\mathbb{C}^{1|2}$ является объектом категории $\mathcal{C}$. Зададим элементы

$$w_1 = 1\otimes v_2, \qquad w_2 = 1\otimes v_0 + \sqrt{2}x\otimes v_2, \qquad w_3 = -x^2\otimes v_2 + \sqrt{2}x\otimes v_0 - 1\otimes v_1.$$

Можно показать, что $V^+ = \mathrm{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$ (см. [23] для случая супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(1|2n)$ с $n > 1$). Неприводимые подмодули, соответствующие аналогам элементов w_1 и w_2 более высокой размерности, изучались в [24]. Заметим, что элемент w_2 четный, а элементы w_1 и w_3 нечетные. В упорядоченном базисе (w_2, w_1, w_3) неприводимое представление $\rho\colon Z \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^+)$ задается как

$$\rho(\bar{x}_\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \rho(\bar{x}_{2\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \rho(\bar{h}) = \begin{bmatrix} 9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -9/2 \end{bmatrix},$$

$$\rho(\bar{x}_{-\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(\bar{x}_{-2\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(f(H)) = \begin{bmatrix} f(1/2) & 0 & 0 \\ 0 & f(-1/2) & 0 \\ 0 & 0 & f(3/2) \end{bmatrix}.$$

3.4. Упорядоченные мономы и базис ПБВ. Упорядоченное $\diamond$-произведение. Вычислим упорядоченные произведения, которые нам потребуются для вывода коммутационных соотношений в следующем разделе. Мы упорядочиваем генераторы диагональной редукционной алгебры как

$$\bar{x}_{-2\alpha} < \bar{x}_{-\alpha} < \bar{h} < \bar{x}_\alpha < \bar{x}_{2\alpha}. \tag{3.14}$$

Найдем лексикографически упорядоченное $\diamond$-произведение любых двух генераторов. Для $y \in \{x_{\pm\alpha}, x_{\pm2\alpha}, h\}$ положим $\tilde{y} = \delta_-(y)$.

Лемма 3.1. *Имеют место следующие равенства*:

$$\bar{y}\diamond\bar{x}_{2\alpha} = \tilde{y}\tilde{x}_{2\alpha} + \text{Ш} \qquad \forall y \in \{x_{\pm\alpha}, x_{\pm2\alpha}, h\}, \tag{3.15а}$$

$$\bar{x}_{-2\alpha}\diamond\bar{y} = \tilde{x}_{-2\alpha}\tilde{y} + \text{Ш} \qquad \forall y \in \{x_{\pm\alpha}, x_{\pm2\alpha}, h\}, \tag{3.15б}$$

$$\bar{x}_\alpha\diamond\bar{x}_\alpha = (\tilde{x}_\alpha)^2 - 2\varphi_1(H+1)\tilde{h}\tilde{x}_{2\alpha} + \text{Ш}, \tag{3.15в}$$

$$\bar{h}\diamond\bar{x}_\alpha = \tilde{h}\tilde{x}_\alpha - 2\varphi_1(H)\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_{2\alpha} + \text{Ш}, \tag{3.15г}$$

$$\bar{x}_{-\alpha}\diamond\bar{x}_\alpha = \tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha - 4\varphi_1(H-1)\tilde{x}_{-2\alpha}\tilde{x}_{2\alpha} + \text{Ш}, \tag{3.15д}$$

$$\bar{h}\diamond\bar{h} = \tilde{h}^2 + \varphi_1(H)\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha - 4\varphi_2(H)\tilde{x}_{-2\alpha}\tilde{x}_{2\alpha} + \text{Ш}, \tag{3.15е}$$

$$\bar{x}_{-\alpha}\diamond\bar{h} = \tilde{x}_{-\alpha}\tilde{h} + 2\varphi_1(H-1)\tilde{x}_{-2\alpha}\tilde{x}_\alpha + \text{Ш}, \tag{3.15ж}$$

$$\bar{x}_{-\alpha}\diamond\bar{x}_{-\alpha} = (\tilde{x}_{-\alpha})^2 + 2\varphi_1(H-1)\tilde{x}_{-2\alpha}\tilde{h} + \text{Ш}. \tag{3.15з}$$

Доказательство. Равенства (3.15а), (3.15б) непосредственно следуют из (3.13), поскольку $[X_\alpha, \tilde{x}_{2\alpha}] = 0$ и $[\tilde{x}_{-2\alpha}, X_{-\alpha}] = 0$. Для (3.15в) имеем

$$\bar{x}_\alpha\diamond\bar{x}_\alpha = (\tilde{x}_\alpha)^2 + [\tilde{x}_\alpha, X_{-\alpha}]\varphi_1(H+1)[X_\alpha, \tilde{x}_\alpha] + \text{Ш} = (\tilde{x}_\alpha)^2 - 2\tilde{h}\varphi_1(H+1)\tilde{x}_{2\alpha} + \text{Ш}.$$

Доказательство соотношений (3.15г), (3.15д) и (3.15е) аналогично. Применяя автоморфизм Θ к (3.15г) и (3.15в), получаем соответственно (3.15ж) и (3.15з). Детальное доказательство содержится в приложениях к препринту [25].

Полезно обратить соотношения (3.15).

Лемма 3.2. *Имеют место следующие равенства*:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}\tilde{x}_{2\alpha} + \mathrm{I\!I} &= \bar{y} \diamond \bar{x}_{2\alpha} \qquad \forall y \in \{x_{\pm\alpha}, x_{\pm 2\alpha}, h\}, && (3.16\text{а})\\
\tilde{x}_{-2\alpha}\tilde{y} + \mathrm{I\!I} &= \bar{x}_{-2\alpha} \diamond \bar{y} \qquad \forall y \in \{x_{\pm\alpha}, x_{\pm 2\alpha}, h\}, && (3.16\text{б})\\
\tilde{x}_{\alpha}\tilde{x}_{\alpha} + \mathrm{I\!I} &= \bar{x}_{\alpha} \diamond \bar{x}_{\alpha} + 2\varphi_1(H+1)\bar{h} \diamond \bar{x}_{2\alpha}, && (3.16\text{в})\\
\tilde{h}\tilde{x}_{\alpha} + \mathrm{I\!I} &= \bar{h} \diamond \bar{x}_{\alpha} + 2\varphi_1(H)\bar{x}_{-\alpha} \diamond \bar{x}_{2\alpha}, && (3.16\text{г})\\
\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_{\alpha} + \mathrm{I\!I} &= \bar{x}_{-\alpha} \diamond \bar{x}_{\alpha} + 4\varphi_1(H-1)\bar{x}_{-2\alpha} \diamond \bar{x}_{2\alpha}, && (3.16\text{д})\\
\tilde{h}\tilde{h} + \mathrm{I\!I} &= \bar{h} \diamond \bar{h} - \varphi_1(H)\bar{x}_{-\alpha} \diamond \bar{x}_{\alpha} + \\
&\quad + 4\big(\varphi_2(H) - \varphi_1(H)\varphi_1(H-1)\big)\bar{x}_{-2\alpha} \diamond \bar{x}_{2\alpha}, && (3.16\text{е})\\
\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{h} + \mathrm{I\!I} &= \bar{x}_{-\alpha} \diamond \bar{h} - 2\varphi_1(H-1)\bar{x}_{-2\alpha} \diamond \bar{x}_{\alpha}, && (3.16\text{ж})\\
\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_{-\alpha} + \mathrm{I\!I} &= \bar{x}_{-\alpha} \diamond \bar{x}_{-\alpha} - 2\varphi_1(H-1)\bar{x}_{-2\alpha} \diamond \bar{h}. && (3.16\text{з})
\end{aligned}$$

Доказательство. В силу (3.15а) и (3.15в)

$$\tilde{x}_{\alpha}\tilde{x}_{\alpha} + \mathrm{I\!I} = \bar{x}_{\alpha} \diamond \bar{x}_{\alpha} + (2\varphi_1(H+1)\tilde{h}\tilde{x}_{2\alpha} + \mathrm{I\!I}) = \bar{x}_{\alpha} \diamond \bar{x}_{\alpha} + 2\varphi_1(H+1)\bar{h} \diamond \bar{x}_{2\alpha}.$$

Преобразуя другие равенства из леммы 3.1, получаем остальные формулы обращения. Детальное доказательство содержится в приложениях к препринту [25].

3.5. Описание диагональной редукционной алгебры. Теперь мы готовы вывести определяющие соотношения.

Теорема 3.1. *Имеют место следующие соотношения в* $U/\mathrm{I\!I}$:

$$\begin{aligned}
f(H) \diamond g(H) &= g(H) \diamond f(H) \qquad \forall f(H), g(H) \in D^{-1}U(\mathfrak{h}), && (3.17\text{а})\\
\bar{x}_{k\alpha} \diamond f(H) &= f(H+k) \diamond \bar{x}_{k\alpha} \qquad \forall k \in \{\pm 1, \pm 2\}, \quad \forall f(H) \in D^{-1}U(\mathfrak{h}), && (3.17\text{б})\\
\bar{h} \diamond f(H) &= f(H) \diamond \bar{h} \qquad \forall f(H) \in D^{-1}U(\mathfrak{h}), && (3.17\text{в})\\
\bar{x}_{2\alpha} \diamond \bar{x}_{\alpha} &= \left(1 - \frac{2}{H+1}\right)\bar{x}_{\alpha} \diamond \bar{x}_{2\alpha}, && (3.17\text{г})\\
\bar{x}_{\alpha} \diamond \bar{x}_{\alpha} &= \frac{2}{H}\bar{h} \diamond \bar{x}_{2\alpha}, && (3.17\text{д})\\
\bar{x}_{-\alpha} \diamond \bar{x}_{-\alpha} &= -\frac{2}{H-2}\bar{x}_{-2\alpha} \diamond \bar{h}, && (3.17\text{е})\\
\bar{x}_{2\alpha} \diamond \bar{h} &= \left(1 - \frac{2}{H+1}\right)\bar{h} \diamond \bar{x}_{2\alpha}, && (3.17\text{ж})\\
\bar{x}_{2\alpha} \diamond \bar{x}_{-\alpha} &= \left(1 - \frac{2}{H(H-1)}\right)\bar{x}_{-\alpha} \diamond \bar{x}_{2\alpha} + \frac{2}{H+1}\bar{h} \diamond \bar{x}_{\alpha}, && (3.17\text{з})\\
\bar{x}_{2\alpha} \diamond \bar{x}_{-2\alpha} &= \left(1 + 2\frac{H^3 + H^2 - 6H + 4}{(H-2)(H-1)H(H+1)(H+2)}\right)\bar{x}_{-2\alpha} \diamond \bar{x}_{2\alpha} - \\
&\quad - \frac{H^2 - H - 1}{(H-1)H(H+1)}\bar{x}_{-\alpha} \diamond \bar{x}_{\alpha} + \frac{1}{H+1}\bar{h} \diamond \bar{h} + \frac{-H^2}{H+1}, && (3.17\text{и})\\
\bar{x}_{\alpha} \diamond \bar{h} &= \left(1 - \frac{1}{H}\right)\bar{h} \diamond \bar{x}_{\alpha}, && (3.17\text{к})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}_\alpha \diamond \bar{x}_{-\alpha} = \left(-1+\frac{-1}{H-1}\right)\bar{x}_{-\alpha}\diamond\bar{x}_\alpha +{}\\ +\frac{4H}{(H-1)(H-2)}\bar{x}_{-2\alpha}\diamond\bar{x}_{2\alpha}-\frac{1}{H}\bar{h}\diamond\bar{h}+H,\end{aligned} \tag{3.17л}$$

$$\bar{x}_\alpha \diamond \bar{x}_{-2\alpha} = \left(1-\frac{2}{(H-1)(H-2)}\right)\bar{x}_{-2\alpha}\diamond\bar{x}_\alpha - \frac{2}{H}\bar{x}_{-\alpha}\diamond\bar{h}, \tag{3.17м}$$

$$\bar{h}\diamond\bar{x}_{-\alpha} = \left(1-\frac{1}{H-1}\right)\bar{x}_{-\alpha}\diamond\bar{h}, \tag{3.17н}$$

$$\bar{h}\diamond\bar{x}_{-2\alpha} = \left(1-\frac{2}{H-1}\right)\bar{x}_{-2\alpha}\diamond\bar{h}, \tag{3.17о}$$

$$\bar{x}_{-\alpha}\diamond\bar{x}_{-2\alpha} = \left(1-\frac{2}{H-2}\right)\bar{x}_{-2\alpha}\diamond\bar{x}_{-\alpha}. \tag{3.17п}$$

Доказательство. Для $y\in\{x_{\pm\alpha},x_{\pm2\alpha},h\}$ положим $\tilde{y}=\delta_-(y)$. Пусть временно $h=x_0$; заметим, что для любых $\beta,\gamma\in\{\pm\alpha,\pm2\alpha,0\}$, таких что $\beta+\gamma\neq0$,

$$\tilde{x}_\beta\tilde{x}_\gamma+\amalg=(-1)^{|\beta||\gamma|}\tilde{x}_\gamma\tilde{x}_\beta+\amalg. \tag{3.18}$$

Это равенство верно благодаря тому, что в U мы имеем $[\tilde{x}_\beta,\tilde{x}_\gamma]\in\mathbb{C}\,\tilde{x}_{\beta+\gamma}\subseteq\amalg$, если $\beta+\gamma\neq0$. Отсюда

$$\begin{aligned}\bar{x}_{2\alpha}\diamond\bar{x}_\alpha &= \tilde{x}_{2\alpha}\tilde{x}_\alpha+[\tilde{x}_{2\alpha},X_{-\alpha}]\varphi_1(H+1)[X_\alpha,\tilde{x}_\alpha]+\amalg=\\ &=\tilde{x}_\alpha\tilde{x}_{2\alpha}+2\varphi_1(H+2)\tilde{x}_\alpha\tilde{x}_{2\alpha}+\amalg=\big(1+2\varphi_1(H+2)\big)\bar{x}_\alpha\diamond\bar{x}_{2\alpha},\end{aligned}$$

где мы применили равенство (3.15а).

Детальное доказательство остальных соотношений содержится в приложениях к препринту [25].

3.6. Базис ПБВ для Z. Из теоремы ПБВ для $U(\mathfrak{G})$ немедленно вытекает, что $U/\amalg$ – свободный левый $D^{-1}U(\mathfrak{h})$-модуль на множестве

$$\big\{\tilde{x}^p_{-2\alpha}\tilde{x}^q_{-\alpha}\tilde{h}^r\tilde{x}^s_\alpha\tilde{x}^t_{2\alpha}+\amalg \mid p,q,r,s,t\in\mathbb{Z}_{\geqslant0},\ q,s\leqslant1\big\}. \tag{3.19}$$

Предложение 3.2. *Относительно $\diamond$-произведения $U/\amalg$ является свободным левым $D^{-1}U(\mathfrak{h})$-модулем на следующем множестве мономов*:

$$\big\{\bar{x}^{\diamond p}_{-2\alpha}\diamond\bar{x}^{\diamond q}_{-\alpha}\diamond\bar{h}^{\diamond r}\diamond\bar{x}^{\diamond s}_\alpha\diamond\bar{x}^{\diamond t}_{2\alpha}\mid p,q,r,s,t\in\mathbb{Z}_{\geqslant0},\ q,s\leqslant1\big\}. \tag{3.20}$$

Доказательство. По теореме 3.1 оболочка множества (3.20) дает $U/\amalg$. По индукции можно показать, что каждое $\diamond$-произведение мономов можно записать как

$$\tilde{x}^p_{-2\alpha}\tilde{x}^q_{-\alpha}\tilde{h}^r\tilde{x}^s_\alpha\tilde{x}^t_{2\alpha}+(\text{члены низшего порядка})+\amalg, \tag{3.21}$$

где лексикографический порядок мономов отвечает $x_{-2\alpha}<x_{-\alpha}<h<x_\alpha<x_{2\alpha}$.

3.7. Основная теорема.

Теорема 3.2. *Пусть D – мультипликативное множество в обертывающей алгебре $U(\mathfrak{osp}(1|2)\times\mathfrak{osp}(1|2))$, порожденное $\{H-n \mid n\in\mathbb{Z}\}$, где $H=h\otimes 1+1\otimes h$. Пусть Z – диагональная редукционная алгебра $Z(\mathfrak{osp}(1|2)\times\mathfrak{osp}(1|2),\mathfrak{osp}(1|2))$. Тогда Z порождается множеством $D^{-1}U(\mathfrak{h})\cup\{\bar{x}_{-2\alpha},\bar{x}_{-\alpha},\bar{h},\bar{x}_{\alpha},\bar{x}_{2\alpha}\}$ как $\mathbb{C}$-алгебра с соотношениями* (3.17).

Доказательство. Предположим, что A – это $\mathbb{C}$-алгебра, порожденная множеством $D^{-1}U(\mathfrak{h})\cup\{\bar{x}_{-2\alpha},\bar{x}_{-\alpha},\bar{h},\bar{x}_{\alpha},\bar{x}_{2\alpha}\}$ по модулю соотношений (3.17). По теореме 3.1 существует сюръективный гомоморфизм $\varphi\colon A\to Z$ этой $\mathbb{C}$-алгебры. Пусть $a\in A$ принадлежит ядру этого отображения. Используя соотношения (3.17), запишем a как линейную комбинации упорядоченных мономов со стоящими слева коэффициентами из $D^{-1}U(\mathfrak{h})$. Применив гомоморфизм φ, получим соответствующую линейную комбинацию упорядоченных мономов в Z. Однако в силу предложения 3.2 эти мономы линейно независимы в $D^{-1}U(\mathfrak{h})$, поэтому все коэффициенты равны нулю. Тем самым $a=0$. Это доказывает, что φ – изоморфизм.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ

4.1. Дилатационный автоморфизм редукционной алгебры.

Предложение 4.1. *Всякий автоморфизм τ диагональной редукционной алгебры для супералгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$, имеющий вид $\tau(\bar{x}_\beta)=k_\beta\bar{x}_\beta$, $\tau(\bar{h})=k_h\bar{h}$ и $\tau(H)=H$ задается при некотором ненулевом $\xi\in\mathbb{C}$ равенствами $k_h=\epsilon\in\{\pm1\}$, $k_\alpha=\xi$, $k_{-\alpha}=\xi^{-1}$, $k_{2\alpha}=\epsilon\xi^2$ и $k_{-2\alpha}=\epsilon\xi^{-2}$. Верно и обратное: для любого $\epsilon\in\{\pm1\}$ и некоторого ненулевого $\xi\in\mathbb{C}$ существует автоморфизм τ, который задается равенствами $\tau(\bar{x}_{\pm\alpha})=\xi^{\pm1}\bar{x}_{\pm\alpha}$, $\tau(\bar{h})=\epsilon\bar{h}$, $\tau(\bar{x}_{\pm2\alpha})=\epsilon\xi^{\pm2}\bar{x}_{\pm2\alpha}$ и $\tau(H)=H$. Группа этих дилатационных автоморфизмов изоморфна $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times\mathbb{C}^*$.*

Доказательство. Используя (3.17л), запишем $\tau(\bar{x}_\alpha\diamond\bar{x}_{-\alpha})-k_\alpha k_{-\alpha}\bar{x}_\alpha\diamond\bar{x}_{-\alpha}$ в базисе ПБВ. Теорема ПБВ (предложение 3.2) влечет $k_\alpha k_{-\alpha}=k_{2\alpha}k_{-2\alpha}=k_h^2=1$. Поэтому $k_h=\epsilon$ при некотором $\epsilon\in\{\pm1\}$. С учетом (3.17д) получаем $k_\alpha^2=k_hk_{2\alpha}$. Поскольку $k_h^2=1$, отсюда следует, что $k_{2\alpha}=k_hk_\alpha^2$.

В обратную сторону, непосредственно проверяем, что автоморфизм τ сохраняет соотношения из теоремы 3.1. Такие автоморфизмы коммутируют, и это доказывает последнее утверждение теоремы.

Пример 4.1. Квадрат Θ^2 антиавтоморфизма Θ (см. п. 3.1.5) является автоморфизмом из теоремы 4.1, отвечающим $\epsilon=1$ и $\xi=-1$.

4.2. Линейный элемент Казимира. Пусть

$$C^{(1)}=\hat{h}=(H-1)\bar{h}. \tag{4.1}$$

Используя соотношения (3.17в) и (3.17к), можно показать, что $C^{(1)}$ коммутирует с $\bar{h}$, H и $\bar{x}_\alpha$. Аналогично $C^{(1)}$ коммутирует с $\bar{x}_{2\alpha}$. Применяя антиавтоморфизм Θ, мы видим, что $C^{(1)}$ – центральный элемент и он также коммутирует с $\bar{x}_{-\alpha}\bar{x}_{-2\alpha}$.

Пример 4.2. Продолжая пример 3.1, мы можем проверить, что

$$\rho(C^{(1)}) = \begin{bmatrix} -9/4 & 0 & 0 \\ 0 & -9/4 & 0 \\ 0 & 0 & -9/4 \end{bmatrix}.$$

4.3. Квадратичный элемент антиКазимира. Напомним, что четный элемент называется *антицентральным*, если он коммутирует с четными элементами и антикоммутирует с нечетными элементами.

Лемма 4.1. *Рассмотрим следующий анзац для квадратичного антицентрального элемента в* $U/\mathrm{I\!I}$:

$$C^{(2)} = f_2(H)\bar{x}_{-2\alpha} \diamond \bar{x}_{2\alpha} + f_1(H)\bar{x}_{-\alpha} \diamond \bar{x}_{\alpha} + f_0(H)\hat{h} \diamond \hat{h} + g(H). \tag{4.2}$$

Тогда элемент $C^{(2)}$ *является антицентральным, если и только если*

$$\begin{aligned} f_1(H-1) &= \frac{H-1}{H-2} f_1(H) + \frac{H-2}{H-1} f_2(H), \\ f_2(H-1) &= -\frac{4(H-1)}{(H-2)(H-3)} f_1(H) - \frac{H-1}{H-3} f_2(H), \\ f_0(H-1) &= -f_0(H) + \frac{1}{(H-1)(H-2)^2} f_1(H), \\ g(H-1) &= -g(H) - f_1(H)(H-1). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Доказательство см. в препринте [25].

Далее покажем существование и единственность (с точностью до комплексного скалярного множителя) приведенной выше системы уравнений.

Рассмотрим следующий элемент из $U(\mathfrak{osp}(1|2))$ (см. статью [26] [1)]):

$$L = -\frac{1}{2}\left(x_\alpha x_{-\alpha} - x_{-\alpha}x_\alpha - \frac{1}{2}\right) = x_{-\alpha}x_\alpha - \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}. \tag{4.4}$$

Можно показать, что $Lx_\alpha + x_\alpha L = 0$.

Поскольку элемент L фиксируется антиавтоморфизмом θ, этот элемент также антикоммутирует с $x_{-\alpha}$ и, следовательно, коммутирует с $x_{\pm 2\alpha}$ и h.

Напомним, что $U(\mathfrak{osp}(1|2)) = U(\mathfrak{osp}(1|2))_{\bar 0} \oplus U(\mathfrak{osp}(1|2))_{\bar 1}$ является супералгеброй, поэтому приведенные выше утверждения влекут, что L принадлежит центру подалгебры $U(\mathfrak{osp}(1|2))_{\bar 0}$ и антикоммутирует с элементами алгебры $U(\mathfrak{osp}(1|2))_{\bar 1}$. Тем самым L – антицентральный элемент алгебры $U(\mathfrak{osp}(1|2))$.

Теперь рассмотрим $\mathcal{L} = L \otimes L \in U$. Тогда $\mathcal{L}$ антикоммутирует с X_α и поэтому коммутирует с $X_{2\alpha}$, следовательно, $\mathcal{L}$ принадлежит нормализатору N левого идеала $I = U\mathfrak{g}_+$ в U. Отсюда

$$\mathsf{P}_M(\mathcal{L} + \mathrm{I\!I}) = \mathcal{L} + I$$

или, эквивалентно,

$$P_M(\mathcal{L} + I) = \mathcal{L} + I.$$

[1)] Базис супералгебры $\mathfrak{osp}(1|2)$ из работы [26] превращается в наш базис с помощью соотношений $L_3 = h/2$, $G_\pm = -(\sqrt{-1}/2)x_{\mp\alpha}$, $L_\pm = -x_{\mp 2\alpha}$.

Упростим $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \mathrm{I\!I}$ и запишем его в базие ПБВ для $U/\mathrm{I\!I}$. Ниже $\equiv$ означает конгруэнтность по модулю $\mathrm{I\!I}$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\equiv (L\otimes 1)(1\otimes L) \equiv \left(x_{-\alpha}x_\alpha - \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}\right)\otimes 1\cdot 1\otimes\left(x_{-\alpha}x_\alpha - \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}\right) \equiv \\ &\equiv \left(\frac{1}{4}(X_{-\alpha}+\tilde{x}_{-\alpha})(X_\alpha+\tilde{x}_\alpha) - \frac{1}{4}(H+\tilde{h}) + \frac{1}{4}\right)\times \\ &\quad\times\left(\frac{1}{4}(X_{-\alpha}-\tilde{x}_{-\alpha})(X_\alpha-\tilde{x}_\alpha) - \frac{1}{4}(H-\tilde{h}) + \frac{1}{4}\right) \equiv \\ &\equiv \left(\frac{1}{4}\tilde{x}_{-\alpha}(X_\alpha+\tilde{x}_\alpha) - \frac{1}{4}(H+\tilde{h}) + \frac{1}{4}\right)\times \\ &\quad\times\left(\frac{1}{4}(-X_{-\alpha}+\tilde{x}_{-\alpha})\tilde{x}_\alpha - \frac{1}{4}(H-\tilde{h}) + \frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}16\mathcal{L} &\equiv \tilde{x}_{-\alpha}(X_\alpha+\tilde{x}_\alpha)(-X_{-\alpha}+\tilde{x}_{-\alpha})\tilde{x}_\alpha + \tilde{x}_{-\alpha}(X_\alpha+\tilde{x}_\alpha)(1-H+\tilde{h}) + \\ &\quad+(1-H-\tilde{h})(-X_{-\alpha}+\tilde{x}_{-\alpha})\tilde{x}_\alpha + (1-H-\tilde{h})(1-H+\tilde{h}) \equiv \\ &\equiv \tilde{x}_{-\alpha}(X_\alpha+\tilde{x}_\alpha)(-X_{-\alpha}+\tilde{x}_{-\alpha})\tilde{x}_\alpha + \tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha(1-H+\tilde{h}) + \tilde{x}_{-\alpha}[X_\alpha,\tilde{h}] + \\ &\quad+(1-H-\tilde{h})\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha + [\tilde{h},X_{-\alpha}]\tilde{x}_\alpha + +(1-H-\tilde{h})(1-H+\tilde{h}) \equiv \\ &\equiv \tilde{x}_{-\alpha}(X_\alpha+\tilde{x}_\alpha)(-X_{-\alpha}+\tilde{x}_{-\alpha})\tilde{x}_\alpha + +\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha(-H+\tilde{h}) + 4\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha + \\ &\quad+(-H-\tilde{h})\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha + (1-H-\tilde{h})(1-H+\tilde{h}).\end{aligned}$$

С учетом того, что $X_\alpha + \tilde{x}_\alpha = 2x_\alpha \otimes 1$ и $X_{-\alpha} - \tilde{x}_{-\alpha} = 2\cdot 1\otimes x_{-\alpha}$ антикоммутируют, получаем

$$\begin{aligned}16\mathcal{L} \equiv \tilde{x}_{-\alpha}(-\tilde{x}_{-\alpha}X_\alpha + X_{-\alpha}X_\alpha - \tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha + X_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha)\tilde{x}_\alpha + \\ +[\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha,\tilde{h}] - 2(H-2)\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha - \tilde{h}\tilde{h} + (H-1)^2.\end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_{-\alpha} = \frac{1}{2}[\tilde{x}_{-\alpha},\tilde{x}_{-\alpha}] = X_{-2\alpha} \in \mathfrak{g}_-$ и аналогично $\tilde{x}_\alpha\tilde{x}_\alpha \in \mathfrak{g}_+$, выводим

$$\begin{aligned}16\mathcal{L} &\equiv \tilde{x}_{-\alpha}X_{-\alpha}X_\alpha\tilde{x}_\alpha + \\ &\quad+[\tilde{x}_{-\alpha},\tilde{h}]\tilde{x}_\alpha + \tilde{x}_{-\alpha}[\tilde{x}_\alpha,\tilde{h}] - 2(H-2)\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha - \tilde{h}\tilde{h} + (H-1)^2 \equiv \\ &\equiv (-X_{-\alpha}\tilde{x}_{-\alpha} + 2\tilde{x}_{-2\alpha})(-\tilde{x}_\alpha X_\alpha - 2\tilde{x}_{2\alpha}) - 2(H-2)\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha - \tilde{h}\tilde{h} + (H-1)^2 \equiv \\ &\equiv -4\tilde{x}_{-2\alpha}\tilde{x}_{2\alpha} - 2(H-2)\tilde{x}_{-\alpha}\tilde{x}_\alpha - \tilde{h}\tilde{h} + (H-1)^2.\end{aligned}$$

Следующая теорема дает явное выражение элемента $\overline{\mathcal{L}}$ в базисе ПБВ.

Теорема 4.1. *Единственный (с точностью до комплексного скалярного множителя) антицентральный элемент $C^{(2)}$ вида (4.2) задается как*

$$16\overline{\mathcal{L}} = 4\frac{H-2}{H-1}\bar{x}_{-2\alpha}\diamond\bar{x}_{2\alpha} - \left(2(H-2) + \frac{1}{H-1}\right)\bar{x}_{-\alpha}\diamond\bar{x}_\alpha - \frac{1}{(H-1)^2}\hat{h}\diamond\hat{h} + (H-1)^2. \tag{4.5}$$

Доказательство. Как мы уже отмечали, $\overline{\mathcal{L}}$ – антицентральный элемент. Используя лемму 3.2, запишем $\overline{\mathcal{L}}$ в базисе ПБВ из предложения 3.2. Получим тождество (4.5). Следовательно, по лемме 4.1 коэффициенты элемента $\overline{\mathcal{L}}$ в правой части (4.5) удовлетворяют уравнениям (4.3).

Единственность вытекает из того факта, что при заданных начальных значениях для $f_i(1/2)$, $i = 0, 1, 2$, и $g(1/2)$ из системы (4.3) единственным образом определяются значения $f_i(a)$ и $g(a)$ для каждого $a \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. В самом деле, (2×2)-матрица коэффициентов имеет определитель $\frac{-(H-3)}{H-2}$. При этом рациональные функции f_i и g единственным образом определяются значениями $f_i(a)$ и $g(a)$.

Пример 4.3. Продолжая пример 3.1, мы можем проверить, что

$$\rho(\overline{\mathcal{L}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Д. П. Желобенко, *Представление редуктивных алгебр Ли*, Наука, М., 1994.

[2] J. Mickelsson, "Step algebras of semi-simple subalgebras of Lie algebras", *Rep. Math. Phys.*, **4**:4 (1973), 307–318.

[3] A. I. Molev, "Gelfand–Tsetlin bases for classical Lie algebras", *Handbook of Algebra*, v. 4, eds. M. Hazewinkel, Elsevier, Amsterdam, 2006, 109–170.

[4] P. I. Etingof, A. Varchenko, "Dynamical Weyl groups and applications", *Adv. Math.*, **167**:1 (2002), 74–127.

[5] V. Tarasov, A. Varchenko, "Difference equations compatible with trigonometric KZ differential equations", *Internat. Math. Res. Notices*, **2000**:15 (2000), 801–829.

[6] H. De Bie, D. Eelbode, M. Roelsb, "The harmonic transvector algebra in two vector variables", *J. Algebra*, **473** (2017), 247–282.

[7] D. P. Zhelobenko, "Hypersymmetries of extremal equations", *Nova J. Theor. Phys.*, **5**:4 (1997), 243–258.

[8] S. Khoroshkin, O. Ogievetsky, "Mickelsson algebras and Zhelobenko operators", *J. Algebra*, **319**:5 (2008), 2113–2165.

[9] S. Khoroshkin, O. Ogievetsky, "Rings of fractions of reduction algebras", *Algebr. Represent. Theory*, **17**:1 (2014), 265–274.

[10] T. Ashton, A. Mudrov, "R-matrix and Mickelsson algebras for orthosymplectic quantum groups", *J. Math. Phys.*, **56**:8 (2015), 081701, 8 pp., arXiv: 1410.6493.

[11] T. Matsumoto, A. Molev, "Representations of centrally extended Lie superalgebra $\mathfrak{psl}(2|2)$", *J. Math. Phys.*, **55**:9 (2014), 091704, 22 pp., arXiv: 1405.3420.

[12] A. van den Hombergh, "A note on Mickelsson's step algebra", *Indag. Math.*, **78**:1 (1975), 42–47.

[13] Д. П. Желобенко, "Экстремальные проекторы и обобщенные алгебры Микельсона над редуктивными алгебрами Ли", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:4 (1988), 758–773.

[14] S. Khoroshkin, O. Ogievetsky, "Diagonal reduction algebra and the reflection equation", *Israel J. Math.*, **221**:2 (2017), 705–729.

[15] V. G. Kac, "Lie superalgebras", *Adv. Math.*, **26**:1 (1977), 8–96.

[16] Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, "Проекционные операторы для простых групп Ли. II. Общая схема построения понижающих операторов. Случай групп $SU(n)$", *ТМФ*, **15**:1 (1973), 107–119.

[17] В. Н. Толстой, “Экстремальные проекторы для редуктивных классических супералгебр Ли с невырожденной обобщенной формой Киллинга”, *УМН*, **40**:4(244) (1985), 225–226.

[18] F. A. Berezin, V. N. Tolstoy, “The group with Grassmann structure $UOSP(1.2)$”, *Commun. Math. Phys.*, **78**:3 (1981), 409–428.

[19] L. Frappat, A. Sciarrino, P. Sorba, *Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras*, Academic Press, San Diego, CA, 2000.

[20] I. M. Musson, *Lie Superalgebras and Enveloping Algebras*, Graduate Studies in Mathematics, **131**, AMS, Providence, RI, 2012.

[21] S.-J. Cheng, W. Wang, *Dualities and Representations of Lie Superalgebras*, Graduate Studies in Mathematics, **144**, AMS, Providence, RI, 2012.

[22] V. N. Tolstoy, “Extremal projectors for contragredient Lie (super)symmetries (Short review)”, *ЯФ*, **74**:12 (2011), 1785–1795.

[23] T. Ferguson, *Weight modules of orthosymplectic Lie superalgebras*, PhD Thesis, University of Texas, Arlington, 2015.

[24] D. A. Williams II, *Bases of infinite-dimensional representations of orthosymplectic Lie superalgebras*, PhD Thesis, The University of Texas, Arlington, 2020.

[25] J. T. Hartwig, D. A. Williams II, *Diagonal reduction algebra for* $\mathfrak{osp}(1|2)$, arXiv: 2106.04380.

[26] A. Lesniewski, “A remark on the Casimir elements of Lie superalgebras and quantized Lie superalgebras”, *J. Math. Phys.*, **36**:3 (1995), 1457–1461.

Поступила в редакцию 17.06.2021,
после доработки 7.10.2021,
принята к публикации 13.10.2021